

LIBRIS

We know
books

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a XI-a

**TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT
(3 ORE)**

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC + CD)

Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (CD)

EDITURA MATHPRESS



CUPRINS

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	3
---	----------

1. MATRICE	5
2. DETERMINANȚI	45
3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	86

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	111
---	------------

1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE	113
2. LIMITE DE FUNCȚII	149
3. FUNCȚII CONTINUE	198
4. FUNCȚII DERIVABILE	233
5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR	348
6. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ	372
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	379

În acest capitol analizăm conceptul de matrice și anumite operații algebrice cu matrice. De asemenea, sunt introduse matricele ca structuri în care se pot stoca și prelucra date. Operațiilor de adunare și înmulțire de pe $\mathbb{C}$ li se asociază operații similare pentru adunarea matricelor și respectiv înmulțirea cu scalari a matricelor. Conceptul matematic care a generat noțiunea de matrice și a perfectat operațiile cu matrice este cel de aplicație liniară. Se definește conceptul de înmulțire a două matrice, care n-are corespondent între operațiile pe $\mathbb{C}$. Se dau proprietăți fundamentale pentru operațiile cu matrice.

Numeroase aplicații practice prezentate vin să sublinieze importanța cunoașterii operațiilor cu matrice în rezolvarea multor probleme din viața cotidiană.

Istoric. Matricele au fost descoperite de doi matematicieni englezi Arthur Cayley (1821-1895 – cu studii la celebrul „Trinity College” în Cambridge) și James Joseph Sylvester (1814-1897 – în 1878 creează celebra „The American Journal of Mathematics”) colaborator al lui Cayley, el fiind cel care în 1850 folosește termenul de matrice (termenul latin fiind „matrix” pentru matcă). Lor li se adaugă W. Hamilton (1805-1865) și A. Cauchy (1789-1857). În matematică o matrice este un „container” de informație evaluabilă.

• Matrice	5	• Probleme propuse	34
• Operații cu matrice	11	• Teste de evaluare	43

1.1. MATRICE

Tabel de tip matriceal

Poate nici un capitol al matematicii studiate în liceu nu beneficiază de atât de multe aplicații în cele mai diverse domenii ale vieții sociale. De aceea am ilustrat fiecare operație prin aplicații diferite. Multe probleme practice se rezolvă utilizând operațiile aritmetice asupra unor date asociate problemelor. Suntem obligați să folosim matrice atunci când vorbim de articole care au **două caracteristici**. Printr-o organizare adecvată a datelor în **blocuri de numere**, putem utiliza aceste operații aritmetice într-o manieră eficientă. Scrierea lor astfel face prelucrarea ușoară cu ajutorul computerului. De exemplu, o rețea actuală de comunicații conține un număr mare de vârfuri și muchii (de ordinul milioanei). Reprezentarea ei plană este practic imposibilă. O alternativă la realizarea ei în plan este utilizarea matricelor.

Exemplul 1. Vânzările în leasing (pe 3 ani) a următoarelor mărci de autoturisme (număr de bucăți) BMW, MERCEDES, FORD, TOYOTA, RENAULT, în cele patru trimestre ale unui an sunt sintetizate în tabelul de mai jos.

Trimestrul \ Marca	I	II	III	IV
BMW	173	191	203	215
MERCEDES	112	123	106	137
FORD	98	107	109	126
TOYOTA	75	82	76	93
RENAULT	205	211	200	273

În acest tabel **pe linii** se citesc mărcile de autoturisme, iar **pe coloane** citim numărul de exemplare vândute în leasing în cursul unui anume trimestru. De exemplu, în linia întâi, corespunzătoare mărcii BMW, și coloana trei, corespunzătoare trimestrului III, găsim numărul 203, ceea ce înseamnă că în trimestrul III al anului s-au vândut 203 autoturisme BMW. În linia trei, corespunzător mărcii FORD și coloana a doua, corespunzător trimestrului al II-lea, întâlnim numărul 107, ceea ce se traduce prin aceea că în trimestrul al II-lea s-au vândut 107 autoturisme marca FORD. Datele din acest tabel le putem sintetiza într-o formă restrânsă astfel:

$$\begin{pmatrix} 173 & 191 & 203 & 215 \\ 112 & 123 & 106 & 137 \\ 98 & 107 & 109 & 126 \\ 75 & 82 & 76 & 93 \\ 205 & 211 & 200 & 273 \end{pmatrix}$$

Observăm că acest tabel are cinci linii (corespunzătoare celor cinci mărci de autoturisme) și patru coloane (corespunzătoare celor patru trimestre).

Un astfel de tabel în care datele sunt așezate pe linii și coloane îl numim **tabel de tip matriceal**. Tabelele de tip matriceal stau la baza noțiunii matematice de matrice. Elementele tabelului matriceal, numerele din tabel, le-am închis între paranteze pentru a preciza că aceasta este toată mulțimea de elemente.

Observăm că indicând un număr din tabel trebuie să-i precizăm două elemente: **linia** și **coloana** pe care se află. Deci pentru identificarea unui element avem nevoie de doi indici: unul pentru linie și altul pentru coloană. Tabelul de mai sus îl putem reprezenta sub forma alăturată:

unde, de exemplu, $a_{11} = 173$, $a_{12} = 191$, $a_{22} = 123$, $a_{43} = 76$, $a_{54} = 273$.

Cât sunt: a_{24} , a_{33} , a_{42} , a_{53} ? Care este semnificația lor?

Exemplul 2. Clasamentul diviziei A la fotbal în 2005, în urma etapei a XIX-a, pentru primele cinci echipe arată astfel:

1. STEAUA	12	5	2	41
2. DINAMO	12	0	7	36
3. RAPID	10	5	4	35
4. FARUL	10	4	5	34
5. F.C. NAȚIONAL	8	6	5	30

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 & 41 \\ 12 & 0 & 7 & 36 \\ 10 & 5 & 4 & 35 \\ 10 & 4 & 5 & 34 \\ 8 & 6 & 5 & 30 \end{pmatrix}$$

unde pe prima coloană este trecut numărul de meciuri câștigate, pe a doua numărul de meciuri egale, pe a treia numărul de meciuri pierdute, iar pe ultima coloană numărul de puncte (3 p pentru victorie, 1 p pentru meci egal și 0 p pentru înfrângere).

Tabelul de tip matriceal este reprezentat mai sus.

Fie $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe.

$N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție. Se numește matrice de tip (m, n) sau încă $(m \times n)$ cu elemente din $\mathbb{C}$ o funcție $A: N_m \times N_n \rightarrow \mathbb{C}$.

Valorile funcției $A(i, j) = a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **elementele matricei**.

Notății. Matricea A se reprezintă printr-un tabel dreptunghiular cu m linii și n coloane, corespunzător celor mn elemente.

Ținând seama de aranjarea elementelor în tabel pe linii și coloane în loc de matrice de tip (m, n) vom spune matrice cu m linii și n coloane.

Uneori, pentru simplitatea scrierii, această matrice se notează $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1, m} \\ j=\overline{1, n}}}$ sau

când nici o confuzie nu-i posibilă, doar $A = (a_{ij})$. Pentru elementul a_{ij} , indicele i arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice j indică pe ce coloană este situat. Liniile matricei sunt mulțimile ordonate: $L_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$,

$L_2 = (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n})$, ..., $L_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$.

Elementele din linii le citim de la stânga la dreapta. Coloanele matricei sunt mulțimile ordonate:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementele din coloane le citim de sus în jos.

Vom nota matricele cu litere mari $A, A_1, A', B, B_1, B', \dots, X, X_1, X', \dots$

Mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente complexe o notăm cu $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$.

Analog, notăm $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{N})$ pentru mulțimile de matrice de tip (m, n) cu elemente numere reale, raționale,

întregi și respectiv naturale. Cum $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, deducem

$\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{N});$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z});$$

$$D = (1 \ \pi \ \sqrt{3}) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R});$$

$$E = \begin{pmatrix} 3i \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}).$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 0 \\ 2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$$

Matrice particulare

1) O matrice de tipul $(1, n)$ (cu o linie și n coloane) se numește **matrice linie** (sau **vector linie**) și are forma $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

Exemple. a) Un vector $\vec{u}$ din plan, în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ poate fi gândit ca o matrice linie cu două coloane de forma $\vec{u} = (x, y)$.

b) În exemplul practic prezentat la începutul capitolului, pentru marca MERCEDES avem matricea linie $(112 \ 123 \ 106 \ 137)$. Aceste patru numere corespund vânzărilor din cele patru trimestre ale anului considerat.

2) O matrice de tipul $(m, 1)$ (cu m linii și o coloană) se numește **matrice coloană** (sau **vector coloană**) și are forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Exemple. a) Vectorul $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ din planul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ îl putem gândi ca o matrice coloană cu două linii de forma $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) În exemplul practic analizat, vânzările de autoturisme din trimestrul al treilea le putem reprezenta prin coloana:

$$\begin{pmatrix} 203 \\ 106 \\ 109 \\ 76 \\ 200 \end{pmatrix}$$

3) O matrice de tip (m, n) cu toate elementele egale cu zero se numește **matricea zero** (nulă). Se notează cu $O_{m,n}$ sau simplu O .

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4) Dacă numărul de coloane este egal cu numărul de linii, adică $m = n$, atunci matricea se numește **pătratică de ordin n** .

Are forma:

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

reprezintă **diagonala principală** a matricei A , iar suma acestor elemente $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ se numește

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Tr provine din prescurtarea cuvântului francez trace = urmă). Sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$ se numește **diagonala secundară** a matricei A.

Mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe o notăm $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în loc de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Exemple. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, are diagonala principală (1,2) și $Tr(A) = 1+2=3$, iar diagonala secundară (-1,0).

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, are diagonala principală (-1,-5,9) și

$Tr(A) = -1-5+9=3$, iar diagonala secundară (-3,-5,7).

3) Printre matricele pătratice de ordin n, una este foarte importantă. Aceasta este:

și se numește **matricea unitate de ordin n** (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt elementele egale cu zero). Uneori pentru scrierea ei se utilizează

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

simbolul lui Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i=j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$. Deci, $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,n}$.

Matricele unitate de ordin 2 și respectiv 3 sunt: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **triunghiulară** dacă are una din formele:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6) Matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **diagonală** dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

În particular, dacă $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \alpha$, atunci matricea A se numește **scalară**.

Utilizarea matricelor în reprezentarea datelor

Prezentăm aici câteva aplicații extrem de interesante ale matricelor în modelarea unor probleme practice, asupra cărora vom reveni atunci când vom vorbi despre operațiile cu matrice pentru a traduce semnificația lor la nivelul problemei discutate.

1) Reprezentarea relațiilor utilizând matricele. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, iar $\mathfrak{R}$ o relație de la A la B . Această relație o reprezentăm printr-o matrice $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}} = (m_{ij})$, unde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (a_i, b_j) \in \mathfrak{R}, \text{ deci dacă } a_i \text{ se află în relația } \mathfrak{R} \text{ cu } b_j \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Matricea $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ se numește **matricea zero-unu**.

Exemplu. Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, „Atunci $a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow (a \in A, b \in B, a > b)$.

Avem $\mathfrak{R} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, iar matricea asociată acestei relații este $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Prezența lui 1 în matrice arată că perechile $(2, 1), (3, 1), (3, 2)$, aparțin relației $\mathfrak{R}$, iar 0 arată că nici o altă pereche nu aparține lui $\mathfrak{R}$.

2) Grafurile și matricele. Teoria grafurilor este unul dintre cele mai importante capitole ale matematicilor aplicate (studiul rețelilor de telecomunicații, problema transporturilor etc.). Un **graf neorientat** G , este format din două mulțimi: 1) o mulțime V ale cărei elemente sunt numite vârfuri (sau **puncte** sau **noduri**) ale lui G și 2) o mulțime M , de perechi neordonate ale vârfurilor numite muchii ale lui G . Graful G se notează $G(V, M)$, pentru a pune în evidență cele două mulțimi. Două vârfuri u, v sunt **adiacente** dacă există o muchie $m = \{u, v\}$. În acest caz u, v se numesc **capetele** muchiei m , iar m se spune că unește u și v sau încă m este incidentă în fiecare din capetele u, v . Grafurile se reprezintă în plan prin diagrame. Fiecare vârf $v \in V$ este reprezentat printr-un punct sau un cerc mic și fiecare muchie $m = \{u, v\}$ este reprezentată printr-un segment (curbă) care unește capetele u, v . Fiecare muchie reprezintă o **legătură** de comunicare directă între două noduri ale rețelei. Fie graful cu diagrama din Fig.1.

Atunci $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, unde $m_1 = \{v_1, v_2\}$, $m_2 = \{v_2, v_3\}$, $m_3 = \{v_3, v_4\}$, $m_4 = \{v_1, v_4\}$, $m_5 = \{v_1, v_3\}$.

Matricea $A = (a_{ij})$ asociată acestui graf are elementele

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \{v_i, v_j\} \text{ este muchie în graf} \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Matricea A se numește **matricea adiacentă** grafului. Aici : Suma elementelor dintr-o linie dă gradul vârfului din acea linie (adică numărul de muchii incidente din acel vârf). Pentru v_2 avem $\text{grad}(v_2) = 3$ (avem muchiile m_1, m_2, m_4), pentru v_3 avem $\text{grad}(v_3) = 2$ (avem muchiile incidente m_2, m_3).

Un graf $G(V, M)$ se numește **orientat** dacă mulțimea M este

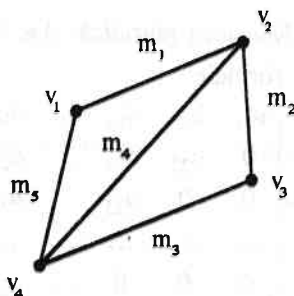
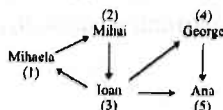


Fig. 1

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



formată din perechi ordonate de elemente din V . Se utilizează o săgeată de la u la v pentru a indica direcția muchiei (u, v) .

Cu acest tip de grafuri se pot modela comportarea unor grupuri de oameni, rezultatele unui turneu de fotbal (tenis, etc.),

Grafuri influență. În studiul comportării unui grup este de observat că anumite persoane pot influența gândirea altora. Un graf orientat numit **graf influență** poate fi utilizat pentru modelarea acestui comportament. Fiecare persoană este reprezentată printr-un vârf. Avem o muchie de la a la b dacă persoana reprezentată prin a influențează persoana reprezentată prin b . Matricea adiacentă este:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Graful turneului

Într-un turneu de fotbal fiecare echipă joacă cu fiecare altă echipă exact o dată. La fiecare meci o echipă este câștigătoare. Echipele participante sunt {A.C. Milan (1), Bayern München (2), F.C. Barcelona (3), Ajax (4), Manchester

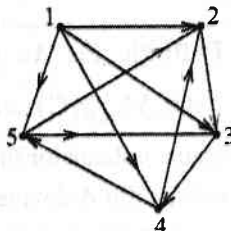


Fig.2

United (5)). Graful orientat al turneului este (am notat cu (a, b) muchia dacă echipa a bate echipa b (Fig.2)). Scrieți matricea adiacentă asociată grafului.

1.2. OPERAȚII CU MATRICE

1) Egalitatea a două matrice

Cum matricea este o funcție are sens să vorbim de egalitatea a două matrice. Reamintim că dacă $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ sunt două funcții, atunci spunem că ele sunt egale dacă: 1) $A = C$ (domeniile sunt egale), 2) $B = D$ (codomeniile sunt egale) și 3) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (punctual funcțiile coincid).

Acum putem formula următoarea:

Definiție. Fie matricele $A: N_m \times N_n \rightarrow K$, $B: N_{m_1} \times N_{n_1} \rightarrow K_1$, $K, K_1 \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că matricele A și B sunt egale dacă: 1) $m = m_1$ și $n = n_1$ (matricele au același tip), 2) $K = K_1$ și 3) $A(i, j) = B(i, j)$, $\forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$ (sau $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$, elementele corespunzătoare sunt egale). Scriem $A = B$.

Două elemente, a_{ij} din matricea A și b_{ij} din matricea B , sunt corespunzătoare dacă sunt situate pe aceeași linie și aceeași coloană în fiecare din matrice.

Observație. Deci două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, de același tip, sunt egale dacă elementele corespunzătoare sunt egale.

Exemplu. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea matricelor:

$$\begin{pmatrix} y+1 & 3^x-2 \\ 2z+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix}. \text{ Din definiție avem egalitățile } y+1=4, \quad 3^x-2=1,$$

$$2z+1=-2, \quad 0=t-3, \text{ adică } y=3, \quad 3^x=3 \Leftrightarrow x=1, \quad z=-\frac{3}{2}, \quad t=3.$$

2) Transpusa unei matrice

Este o primă operație simplă care se efectuează asupra matricelor.

Definiție. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. **Transpusa matricei** A este matricea notată ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, care se obține din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii): linia întâi din A devine coloana întâi în tA , linia a doua din A devine coloana a doua în tA , etc.

Operația prin care fiecărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numește **operația de transpunere a matricelor**.

Observații. 1) Prin operația de transpunere a unei matrice pătratică de ordin n , elementele de pe diagonala principală rămân pe loc – cei doi indici fiind egali – ceea ce înseamnă că $Tr({}^tA) = Tr(A)$.

$$2) \quad ({}^t({}^tA)) = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Exemplu. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ \pi & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

4) Matrice simetrică. O matrice pătratică de ordin n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **simetrică**

dacă $A = {}^tA$, ceea ce-i echivalent cu $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}$. Prin urmare, într-o matrice simetrică elementele de pe diagonala principală rămân pe loc, iar celelalte sunt simetrice în raport cu această diagonală. Deci este suficient să știm elementele de pe diagonala principală și de deasupra acesteia, pentru a completa celelalte elemente prin simetrie față de diagonala principală.

Dacă A este o matrice simetrică, atunci forma ei este:

LIBRIS We know books

a) pentru $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; b) pentru $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Matrice antisimetrică. O matrice pătratică de ordin n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **antisimetrică** dacă $A = -{}^tA$, adică echivalent cu $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, n}$. Dacă

punem $i = j$, atunci din $a_{ii} = -a_{ii}$, rezultă $a_{ii} = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, ceea ce arată că într-o matrice antisimetrică elementele de pe diagonala principală sunt egale cu zero. În plus, dacă se cunosc elementele de deasupra acestuia, atunci pentru a le obține pe cele de sub diagonala principală le simetrizăm pe cele de deasupra diagonalei și le schimbăm semnul. Analog se procedează dacă se cunosc elementele de pe diagonala principală și de sub aceasta. Dacă A este o matrice antisimetrică, atunci forma ei este:

a) pentru $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; b) pentru $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) Adunarea matricelor

Am văzut că dacă $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, atunci suma funcțiilor f, g este funcția $f + g: A \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $\forall a \in A$.

Cum și matricele sunt funcții are sens să vorbim de adunarea lor. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea C se numește **suma** matricelor A și B dacă $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$.

Operația prin care oricăror două matrice de același tip li se asociază suma lor se numește **adunarea matricelor**.

Observații. 1) Se pot aduna numai matrice care sunt de același tip, adică au același număr de linii și respectiv același număr de coloane. Rezultatul este o matrice de același tip. Deci $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2) Explicit adunarea matricelor A, B înseamnă

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Spunem că adunarea matricelor se face pe componente.

3) Dacă A, B sunt matrice linie (sau matrice coloană) de aceeași dimensiuni, atunci adunarea lor coincide cu adunarea vectorilor.

Exemple. Să se calculeze $A+B$ pentru: 1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R. 1) Observăm că $A, B \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$. Avem adunarea a doi vectori. Obținem:

$$A+B = \begin{pmatrix} -2+4 & 3+(-2) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Cele două matrice sunt de același tip, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Deci are sens suma lor.

$$\text{Avem: } A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Cum $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sunt de tipuri diferite ele nu se pot aduna.

Proprietăți ale adunării matricelor

Ținând seama de proprietățile pe care le are adunarea numerelor complexe și egalitatea a două matrice, se stabilesc ușor următoarele proprietăți:

A1) (Asociativitatea adunării) Adunarea matricelor este asociativă, adică $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A2) (Comutativitatea adunării) Adunarea matricelor este comutativă, adică $A+B = B+A$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A3) (Element neutru) Adunarea matricelor admite matricea nulă ca element neutru, adică $A+O_{m,n} = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A4) (Elemente opuse) Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are o opusă, notată cu $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A) = O_{m,n}$.

Dacă $A = (a_{ij})$, atunci $-A = (-a_{ij})$, adică opusa lui A , $-A$, se obține din A prin schimbarea semnelor tuturor elementelor sale.

Observații. 1) Mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ înzestrată cu operația de adunare și având proprietățile A1) – A4) spunem că formează un **grup comutativ** (sau **abelian**).

2) În loc să scriem $A+(-B)$, notăm $A-B$ și spunem că facem **diferența** dintre matricea A și matricea B . Deci, în scăderea a două matrice elementele se scad pe componente.

Exemple. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.